TD n°11: Fonctions harmoniques et sous-harmoniques.

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Fonctions harmoniques.

Exercice 1. Le noyau de Poisson.

1. On écrit $z = re^{it}, \zeta = e^{i\theta}$. Comme $|z| < 1, \zeta = 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= (1 + z/\zeta)\frac{1}{1 - z/\zeta} \\ &= (1 + z/\zeta)\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \\ &= 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} r^n e^{ni(t-\theta)}.\end{aligned}$$

La partie réelle de $2r^n e^{ni(t-\theta)}$ étant $r^n e^{ni(t-\theta)} + r^n e^{-ni(t-\theta)}$, on a la formule voulue.
Pour la deuxième partie de la question, on écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\zeta)d\zeta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\int_0^{2\pi} e^{ni(t-\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} 2\pi \mathbf{1}_{n=0} = 1.\end{aligned}$$

2. On écrit explicitement

$$P_{\mathbb{D}}\phi(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Comme $f \in L^1$, $\theta \mapsto f(e^{i\theta})e^{-in\theta}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$. Il suffit de poser $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta$. Etant donné que f est à valeurs réelles, on a bien $a_{-n} = \overline{a}_n$, et $|a_n| \leqslant |f|_{L^1(\mathbb{T})}$.

3. On pose $\zeta = e^{it}$ et on écrit

$$\begin{aligned}|\phi_r(\zeta) - \phi(\zeta)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it}, e^{i\theta})[\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})]d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2}\left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})\right| d\theta.\end{aligned}$$

Il faut à présent découper l'intégrale. En fixant $\delta > 0$, on a

$$\limsup_{r\to 1^-}\int_{|\theta - t|\geqslant\delta}\frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2}\left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})\right| d\theta = 0$$

car $\frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} \to 0$ uniformément en t, θ. Reste à étudier l'intégrale au voisinage de t. On choisit $\varepsilon > 0$, on va montrer que pour δ assez petit, on a

$$\limsup_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{|t-\theta|\leqslant\delta}\frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2}\left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})\right| d\theta \leqslant \varepsilon.$$

Pour ce faire, on choisit δ tel que $|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})| < \varepsilon$ pour tous t, θ vérifiant $|t-\theta| \leqslant \delta$ (qui existe par continuité uniforme de ϕ) et donc

$$\begin{aligned}\int_{|t-\theta|\leqslant\delta} \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} \left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})\right| d\theta &\leqslant \varepsilon \int_{|t-\theta|\leqslant\delta} \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} d\theta \\ &\leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2} d\theta = \varepsilon.\end{aligned}$$

Si l'on veut avoir $|\phi_r(e^{it}) - \phi(e^{it})| \leqslant \varepsilon$, il suffit en premier lieu de choisir $\delta > 0$ de sorte à ce que $\sup_{|t-\theta|\leqslant\delta} \left|\phi(e^{i\theta}) - \phi(e^{it})\right| < \varepsilon/2$, puis de choisir r de sorte à ce que l'intégrale sur $|\theta - t| \geqslant \delta$ soit $< \varepsilon/2$.

Exercice 2. Le problème de Dirichlet holomorphe.

1. Supposons que f est une telle fonction : elle s'étend continument au disque. Comme f est holomorphe, elle vérifie $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} d\zeta$. Comme $f(\zeta) = \overline{\zeta} = \zeta^{-1}$ sur $\mathbb{T}$, cette intégrale est nulle pour tout $n \geqslant 0$, et f devrait être la fonction nulle.

2. Soit ϕ continue sur le cercle qui prolonge une fonction holomorphe f sur le disque ouvert. Comme f est holomorphe, elle vérifie nécessairement
$$\int_{\mathbb{T}} \zeta^m f(\zeta) d\zeta = 0$$
pour tout $m \geqslant 0$. En écrivant $f(\zeta) = \phi(\zeta)$ et en explicitant l'intégrale, on obtient
$$\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{(m+1)i\theta} d\theta = 0.$$
pour tout $m \geqslant 0$.

3. Il existe des fonctions harmoniques u, v réelles sur $\mathbb{D}$ s'étendant en $\Re\phi$, $\Im\phi$ respectivement sur le bord. Reste à vérifier que $u + iv$ est holomorphe, sachant qu'elle est donnée par
$$(u+iv)(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(re^{it}, e^{i\theta})\phi(e^{i\theta}) d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} d\theta r^{|n|} e^{nit}.$$
Comme $\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta = 0$ pour $n < 0$, cette fonction est clairement analytique.

Exercice 3. Gradient d'une fonction harmonique positive.

1. On utilise les équations de Cauchy-Riemann, qui nous enseignent que $\partial_x f = -i\partial_y f$, et par conséquent $\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) f = \partial_x f$. Par conséquent, $\partial_x \Re(f) = \Re(\partial_x f) = \Re(\partial_z f)$. Similairement, $\partial_y \Re(f) = \Re(\partial_y f) = \Re(-i\partial_z f) = \Im(\partial_z f)$.

2. Comme $P(z,\zeta) = \Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)$, son gradient est donné par la dérivée de la fonction holomorphe (en z)$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$. Un rapide calcul donne que la dérivée est
$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{-(\zeta+z)}{(\zeta-z)^2} = \frac{2\zeta}{(\zeta-z)^2}.$$
En passant au module, on obtient
$$|\nabla_z P(z,\zeta)| = \frac{2}{|\zeta - z|^2} = \frac{2}{1-|z|^2} P(z,\zeta).$$

3. Soit $r < \rho$. On peut utiliser la formule pour u avec le noyau de Poisson, à savoir pour $z \in \mathbb{D}(0,r)$:
$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) u(e^{i\theta}) d\theta.$$

En prenant le gradient, et en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$
\begin{aligned}
|\nabla u(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \nabla_z P(z/r, e^{i\theta})u(e^{i\theta})d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{r}(\nabla_z P)(z/r, e^{i\theta})\right| u(e^{i\theta})d\theta \\
&\leqslant \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r(1-|z/r|^2)}P(z,\zeta)u(e^{i\theta})d\theta \\
&\leqslant \frac{2r}{r^2-|z|^2}u(z).
\end{aligned}
$$

En prenant le inf sur $r < \rho$, on trouve finalement :

$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{2\rho}{\rho^2-|z|^2}u(z).$$

4. Soit φ l'unique biholomorphisme envoyant 0 sur z de dérivée positive en 0. On pose $v = u \circ \varphi$, qui est harmonique positive sur $\mathbb{D}$. Elle vérifie donc

$$|\nabla v(0)| \leqslant 2v(0).$$

On trouve grâce à la question 1 que $\nabla v(0) = f'(\varphi(0))\varphi'(0)$ (au sens de la multiplication des nombres complexes), où f est une fonction holomorphe de partie réelle v, et donc

$$|\nabla v(0)| = R(U,z)|f'(z)| = R(U,z)|\nabla u(z)|.$$

On rentre cette égalité dans l'inégalité obtenue plus tôt, et on obtient

$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{1}{R(U,z)}u(z).$$

Exercice 4. Récupération d'une fonction holomorphe depuis sa partie réelle.
Commençons par montrer que les deux fonctions ont même partie réelle : Il s'agit simplement de constater que

$$\Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(e^{i\theta})d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})u(e^{i\theta})d\theta = u(z) = \Re(f(z)).$$

On observe ensuite que $z \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(e^{i\theta})d\theta$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$: comme sa partie réelle coïncide avec celle de f, elles ne peuvent différer que d'une constante imaginaire, que l'on calcule être $\Im f(0)$ en évaluant en 0.

Exercice 5. Harmonicité d'un produit.
On écrit $\Delta = 4\partial\overline{\partial}$, et comme $\Delta u = \Delta v = 0$, on trouve $\partial\overline{\partial}(uv) = \partial u\overline{\partial}v + \partial v\overline{\partial}u = 2\Re(\overline{\partial}u\partial v)$. Si $u + iav$ est holomorphe, alors $\overline{\partial}u = -ia\overline{\partial}v$, donc $\overline{\partial}u\partial v = -ia\partial v\overline{\partial}v = -ia|\partial v|^2$, et donc uv est harmonique. Réciproquement si $\overline{\partial}u\partial v$ est imaginaire pur, alors $\overline{\partial}u/\overline{\partial}v$ est également imaginaire pur pour $\overline{\partial}v \neq 0$. Reste à voir que $\overline{\partial}u/\overline{\partial}v$ est antiholomorphe (une fonction antiholomorphe imaginaire pure est constante). Pour ce faire, on calcule

$$
\begin{aligned}
4\partial\left(\frac{\overline{\partial}u}{\overline{\partial}v}\right) &= \frac{4\partial\overline{\partial}u\overline{\partial}v - 4\overline{\partial}u\partial\overline{\partial}v}{(\overline{\partial}v)^2} \\
&= \frac{\Delta u\overline{\partial}v - \overline{\partial}u\Delta v}{(\overline{\partial}v)^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Exercice 6. Invariance par biholomorphismes.
On calcule $4\partial\overline{\partial}(u\circ\varphi)$. J'affirme que pour u, φ juste C^1, on a

$$\partial(u\circ\varphi) = \partial u\circ\varphi\cdot\partial\varphi + \overline{\partial}u\circ\varphi\cdot\partial\overline{\varphi}$$

et

$$\overline{\partial}(u\circ\varphi) = \partial u\circ\varphi\cdot\overline{\partial}\varphi + \overline{\partial}u\circ\varphi\cdot\overline{\partial}\overline{\varphi}.$$

Autrement dit, $z, \overline{z}$ se comportent comme deux coordonnées indépendantes.
Pour prouver cette égalité, on considère $u\circ\varphi$ comme une fonction de U dans $\mathbb{C}$, de se rappeler que $d_a(u\circ\varphi) = d_{\varphi(a)}u\circ d_a\varphi$ en tant qu'applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans lui-même. De là, il suffit d'écrire $du = \partial u dz + \overline{\partial}u d\overline{z}$ et $d\varphi = \partial\varphi dz + \overline{\partial}\varphi d\overline{z}$.
De là, on tire que pour φ holomorphe,

$$\overline{\partial}(u\circ\varphi) = \overline{\partial}u\circ\varphi\cdot\overline{\partial}\overline{\varphi}$$

et $\overline{\partial}\overline{\varphi} = \overline{\partial\varphi}$. Ainsi,

$$\partial\overline{\partial}(u\circ\varphi) = \partial(\overline{\partial}u\circ\varphi\cdot\overline{\partial\varphi}) = \partial\overline{\partial}u\circ\varphi\cdot\partial\varphi\overline{\partial\varphi}$$

car $\partial\overline{\partial\varphi} = 0$. C'est exactement le résultat recherché à multiplication par 4 près.

Exercice 7. Fonctions pluriharmoniques
On a vu dans un TD précédent qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{C}^n$ n'est pas nécessairement, même pas localement, la partie réelle d'une fonction holomorphe (c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ qui vérifie $\partial_j f = 0$ pour tout j).
Une fonction $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est dite pluriharmonique si elle vérifie $\partial_j\overline{\partial}_k u = 0$ pour tous j, k, où

$$\partial_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\ \overline{\partial}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

où x_j, y_j désignent les parties réelles et imaginaires des coordonnées $z_1, ..., z_n$ sur $\mathbb{C}^n$.

1. Comme $\overline{\partial}_k f = 0$ pour tout k, nécessairement $\partial_j\overline{\partial}_k f = 0$. De même, comme $\partial_j\overline{f} = 0$ on a $\partial_j\overline{\partial}_k\overline{f} = 0$. En faisant la moyenne, on trouve $\partial_j\overline{\partial}_k\Re(f) = 0$.

2. La fonction F est bien définie par convexité de U. Pour voir que $\nabla F = \boldsymbol{f}$, on calcule $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ pour $j > 1$, vu que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1$ par définition.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \int_0^{x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(t, x_2, ..., x_n)dt\\ &= \int_0^{x_1}\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_n)dt\\ &= f_j(x_1, ..., x_n).\end{aligned}$$

3. La condition $\Re(\partial_j\overline{\partial}_k u) = 0$ se traduit précisément en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j\partial y_k} = 0.$$

Si l'on note $f_{u,2j-1} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}$ et $f_{u,2j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, l'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial f_{u,2k}}{\partial x_j} = \frac{\partial f_{u,2j-1}}{\partial y_k}.$$

Le fait que

$$\frac{\partial f_{u,2k-1}}{\partial x_j} = \frac{\partial f_{u,2j-1}}{\partial x_k}$$

et

$$\frac{\partial f_{u,2k}}{\partial y_j} = \frac{\partial f_{u,2j}}{\partial y_k}$$

découle du fait que

$$0 = 4\Im(\partial_j\overline{\partial}_k u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j\partial x_k}.$$

On note v une fonction telle que $\nabla v = \boldsymbol{f}_u$, qui existe bien car les polydisques (définis par $|z_i| < r_i$) sont convexes.

4. La condition $\nabla v = \boldsymbol{f}_u$ garantit que $\frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}$ et $\frac{\partial v}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Cette égalité se réécrit précisément $\overline{\partial}_j v = i\overline{\partial}_j u$, ou encore $\overline{\partial}_j(u+iv) = 0$, donc $u+iv$ est holomorphe.

Fonctions sous-harmoniques.

Exercice 8. Inégalité de la moyenne et principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques.
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $u \in C^2(U,\mathbb{R})$. On dit que u est sous-harmonique si $\Delta u \geqslant 0$.

1. On fait un développement limité de u à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u(z+re^{i\theta}) &= u(z) + \partial_x u(z) r\cos(\theta) + \partial_y(u) r\sin(\theta) \\ &+ \frac{r^2}{2}\left(\partial_x^2 u(z)\cos^2(\theta) + \partial_y^2 u(z)\sin^2(\theta) + 2\partial_x\partial_y u(z)\sin(\theta)\cos(\theta)\right) + o(r^2). \end{aligned}$$

à l'intégration, tous les termes autres que $u(z)$, $\frac{r^2}{2}\partial_x^2 u(z)\cos^2(\theta)$ et $\frac{r^2}{2}\partial_y^2 u(z)\sin^2(\theta)$ (et le $o(r^2)$) disparaissent. Les termes restants s'inègrent respectivement à $u(z)$, $\frac{r^2}{4}\partial_x^2 u(z)$ et $\frac{r^2}{4}\partial_y^2 u(z)$, ce qui donne l'estimation.
Pour r suffisamment petit, le $o(r^2)$ est petit devant $r^2\Delta u(z)$, ce qui implique que

$$u(z) \leqslant u(z) + \frac{r^2}{4}\Delta u(z) + o(r^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta.$$

2. Si u est sous-harmonique, $u+\varepsilon|z|^2$ est strictement sous-harmonique. On trouve donc

$$u(z) + \varepsilon|z|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} |z+re^{i\theta}|^2 d\theta.$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on trouve l'inégalité de la moyenne pour u.

3. On va exploiter cette propriété pour démontrer que les fonctions sous-harmoniques vérifient le principe du maximum.

   (a) Soit $M = u(z)$ le maximum global de u. On pose $X \subseteq U$ l'ensemble des points où $u = M$ et Y l'ensemble des points où $u < M$. Y est clairement ouvert. L'inégalité de la moyenne dit que si $u(z) = M$ alors on a pour tout r assez petit $M \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta$, ce qui n'est possible que si $u(z+re^{i\theta}) = M$ pour tout θ, tout r assez petit donc sur un voisinage de z. X est donc ouvert, son complémentaire Y est ouvert, et donc $X = U$.

   (b) Si u admet son maximum en z dans l'intérieur de K, elle est constante sur la composante connexe de K correspondante et atteint donc son maximum au bord de cette composante connexe.

   (c) On considère une suite croissante de compacts K_n vérifiant $\bigcup_n K_n = U$, par exemple $K_n = \{z \in U : d(z,\partial U) \geqslant 1/n\}$. Par l'absurde, si jamais $u(z) = a > 0$ alors $\sup_{z\in\partial K_n} u(z) \geqslant a$ pour n assez grand, et on peut donc trouver une suite de $(z_n)_n$, $z_n \in \partial K_n$ vérifiant $u(z_n) \geqslant a$ pour tout n. Ces z_n s'accumulent en un point du bord de U car $\overline{U}$ est compact, ce qui contredit $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leqslant^0$.

4. Soit v la fonction harmonique $P_{\mathbb{D}(z,\rho)}\left(u|_{\partial\mathbb{D}(z,\rho)}\right)$. La fonction $u-v$ est sous-harmonique sur $\mathbb{D}(z,\rho)$ car $\Delta(u-v) = \Delta(u) \geqslant 0$ et vérifie $\limsup_{z\to\zeta} u(z) - v(z) = 0$ pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}(z,\rho)$. Par conséquent, $u - v \leqslant 0$ sur $\mathbb{D}(z,\rho)$, donc $u \leqslant v$. Il suffit à présent d'appliquer l'égalité précédente en z pour obtenir l'inégalité de la moyenne globale.

Exercice 9. Potentiel d'une mesure.
Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ est un potentiel de μ si $\Delta p = \mu$ au sens des distributions, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a

$$\int_{\mathbb{C}} p(z)\Delta\varphi(z)d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z)d\mu(z).$$

1. On peut choisir par exemple $\frac{x^2+y^2}{4}$.
On rappelle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a :

$$\int_{\mathbb{C}} \log|z|\Delta\varphi(z)d\lambda(z) = 2\pi\varphi(0)$$

2. L'équation précédente implique précisément que $\frac{1}{2\pi}\log|z-w|$ est un potentiel de la masse de Dirac.
3. Si μ est à support compact, on définit
$$p_\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \log|z-w| d\mu(w).$$
On pose $K = \mathrm{Supp}(\mu)$, commençons par montrer l'harmonicité sur $\mathbb{C}\setminus K$: Comme μ est finie à support compact et que $z \mapsto \log|z-w|$ est C^∞ pour tout $w \in K, z \notin K$, le laplacien commute à l'intégrale, et comme $\log|z-w|$ est harmonique en z, on a $\Delta(p_\mu|_{\mathbb{C}\setminus K}) = 0$.
Pour montrer que c'est un potentiel de μ, on fait essentiellement le calcul suivant : p_μ est la convolution de $\log|z|$ avec μ, vus en tant que distribution et distribution à support compact. Comme $\partial_x(S*T) = (\partial_x S)*T = S*(\partial_x T)$ pour S distribution et T distribution à support compact, on trouve
$$\Delta(\log|z| * \mu) = (\Delta \log|z|) * \mu = \delta_0 * \mu = \mu.$$
On peut également faire un calcul plus "low-tech" en appliquant le théorème de Fubini à l'intégrale
$$\int_{\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}} \log|z-w|\Delta\varphi(z) d\mu(w) d\lambda(z).$$
4. Si $|z|>1$, il existe une détermination holomorphe de $w \mapsto \log(z-w)$ au voisinage du disque unité fermé. Par la formule de Cauchy, on a
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log(z-e^{i\theta}) d\theta = \log(z)$$
et en passant aux parties réelles on a l'égalité voulue.
Pour le cas $|z|<1$, on observe que l'intégrale ne dépend que de $r=|z|$. On dérive
$$\partial_r \int_0^{2\pi} \log|r-e^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r-e^{i\theta}} d\theta = -i\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z(r-z)}.$$
On calcule $\frac{r}{z(r-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{r-z}$, la fonction a donc deux pôles dans le disque et les résidus sont $1, -1$ respectivement, donc la somme est 0 et l'intégrale est nulle. Par continuité, l'intégrale est également nulle quand $|z|=1$.
5. On commence par vérifier que $\log|z|$ vérifie l'inégalité de la moyenne. Soit $r>0$, on calcule
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z-re^{i\theta}| d\theta &= \log(r) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z/r - e^{i\theta}| d\theta \\ &= \log(r) + \log^+|z/r| \\ &\geqslant \log|z|.\end{aligned}$$
C'est suffisant pour calculer :
$$\begin{aligned} p_\mu(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \log|z-w| d\mu(w) \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|z-w+re^{i\theta}| d\theta d\mu(w) \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \log|z+re^{i\theta}-w| d\mu(w)\right) d\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\mu(z+re^{i\theta}) d\theta.\end{aligned}$$
$z \mapsto \log^+|z|$ n'est même pas de classe C^1. En fait, le mieux qu'on peut prouver (à l'aide du lemme de Fatou) est que p_μ est semi-continue inférieurement à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, c'est-à-dire que $\limsup_{w\to z} p_\mu(w) \leqslant p_\mu(z)$.
C'est le mieux qu'on puisse faire, étant donné que par exemple, la fonction
$$z \mapsto \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\log|z-2^{-n}|$$
qui est le potentiel de $\mu = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\delta_{2^{-n}}$, est discontinue en 0.